高自由度ハミルトン系の楕円点近傍の相空間構造について

名古屋大学 理学部　後藤 振一郎[1], 野崎 一洋, 山田 裕康

1 はじめに

ハミルトン力学系はそれ自身に興味が注がれているだけでなく、化学反応モデル、タンパク質のモデルなどとして研究され重要である。高自由度の力学系は物理で頻繁に現われるが、その力学系は高次元の相空間を持つため幾何学的直観による運動の理解が困難である。また、それゆえに研究が進んでいない。従って、高自由度のハミルトン系の研究はその進展が望まれている。

今回は、高自由度のハミルトン系の基本的な相空間である、全次元楕円型不動点まわりの相空間構造について報告する。特に2つの弱非線形シンプレクティックマップの結合系を例に、サイト一様解の不安定性 [WH86] を摂動論を用いて相空間構造を調べる。

2 モデルとその簡約、系の解析

今回の報告では2つの非線形素子が線形結合した系でモデルを考える。特に離散時間でのモデル (シンプレクティックマップ) を考えるが、時間連続極限をとって正準方程式系だとモデルを考えてもよい。

$$
\left\{\begin{aligned}
x_1^{n+1} &= x_1^n + \tau p_1^{n+1}, \qquad x_2^{n+1} = x_2^n + \tau p_2^{n+1},\\
p_1^{n+1} &= p_1^n + \tau\left(-\Omega^2 x_1^n + \varepsilon\left\{\nu(x_2 - x_1) - \alpha x_1^3\right\}\right),\\
p_2^{n+1} &= p_2^n + \tau\left(-\Omega^2 x_2^n + \varepsilon\left\{\nu(x_1 - x_2) - \alpha x_2^3\right\}\right),
\end{aligned}\right. \tag{1}
$$

$$
\sum_{l=1,2} dx_l^{n+1} \wedge dp_l^{n+1} = \sum_{l=1,2} dx_l^n \wedge dp_l^n.
$$

ここで $\{x_j^n, p_j^n\}_{j=1,2}$ は実数の正準共役な力学変数、n は離散時間であり、τ は時間差分間隔に相当するパラメーターで特に小さいとは指定しない。Ω, ν, α も $\mathcal{O}(1)$ のパラメーターである。また、ε は摂動パラメーターで小さい量である $(0 < \varepsilon \ll 1)$。今回の研究では $\nu = -|\nu| < 0, \alpha = |\alpha| > 0$ とする。系を相空間原点が全次元楕円型の不動点となるようにパラメーターを選ぶものとする。ここで系を簡単にするため、くりこみ群の方法 [GMN99][GN01] を用いる。詳細は省略するが、以下の様にシンプレクティック性を厳密に保存したくりこみ群方程式が得られる。

---

[1] E-mail: sgoto@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp

$$\left(1-i\frac{\varepsilon\tau^2\nu}{4\sin\theta}L_j\right)A_j^{n+1}=\left(1+i\frac{\varepsilon\tau^2\nu}{4\sin\theta}L_j\right)\exp\left\{i\frac{-3\varepsilon\alpha\tau^2}{2\sin\theta}|A_j^n|^2\right\}A_j^n,\quad (j=1,2),\qquad(2)$$

$$\text{ここで}\quad L_1A_1^n\equiv -A_1^n+A_2^n,\quad L_2A_2^n\equiv A_1^n-A_2^n,\qquad \cos\theta\equiv 1-\Omega^2/2,$$

$$\sum_{l=1,2}dA_l^{n+1}\wedge dA_l^{*n+1}=\sum_{l=1,2}dA_l^n\wedge dA_l^{*n}.\qquad \text{保存量：}\sum_{l=1,2}|A_l^n|^2.$$

ここで $\{A_j^n\}_{j=1,2}$ は複素数の力学変数であり、元もとの変数 x_j^n とくりこみ変数 A_j^n との対応は $x_j^n=A_j^n\exp(-i\theta n)+\mathrm{c.c.}$ で、* や、c.c. は複素共役を表す。A_j^n に正準共役な力学変数は A_j^{*n} である。また、(2) 式は $\varepsilon\tau^2$ がセットになっているので時間連続近似 ($\tau\to 0$) での解析は妥当であろう。時間連続近似のくりこみ群方程式は以下で与えられ、以下この方程式系を解析する事にする。

$$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{dQ_1}{dt'} & =-i\Big[Q_2+|Q_1|^2Q_1\Big]=\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial Q_1^*},\quad \dfrac{dQ_1^*}{dt'}=-\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial Q_1},\\ \dfrac{dQ_2}{dt'} & =-i\Big[Q_1+|Q_2|^2Q_2\Big]=\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial Q_2^*},\quad \dfrac{dQ_2^*}{dt'}=-\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial Q_2},\\ \quad\mathcal{H} & =-i\Big[Q_1^*Q_2+Q_1Q_2^*+\{|Q_1|^4+|Q_2|^4\}/2\Big],\qquad \text{保存量：}\sum_{l=1,2}|Q_l|^2,\end{array}\right.\qquad(3)$$

ここで $x_j=\widetilde{A}_j\exp(-i\Omega t)+\mathrm{c.c.}$, $t'\equiv|\nu|\varepsilon t/(2\Omega)$, $Q_j\equiv\sqrt{3\alpha/|\nu|}\exp\{-i|\nu|\varepsilon t/(2\Omega)\}\widetilde{A}_j$, $(j=1,2)$ で $\widetilde{A}_j$ が (2) 式でのくりこみ変数に対応する。サイト一様解 $Q_0(t')=Q_0(0)\exp\{-i(1+|Q_0(0)|^2)t'\}$ からの "ずれ" を表す変数 $a_j=R_j\exp(iq_j)$ を $Q_j(t')\equiv a_j(t')\exp\{-i(1+|Q_0(0)|^2)t'\}$ で定義する。サイト一様解が線形不安定である時、この a_j は周期軌道 (サイト一様解, torus) 周りの不安定多様体 (whisker) を表すことになる。またこの系は $\mathcal{H}$ と保存量の存在により可積分である。変数変換 $R_1=b\sqrt{1+\Gamma}, R_2=sb\sqrt{1-\Gamma}$ ($2b^2$ は保存量の値、$s\equiv\pm1$, 以後 $s=1$ に固定) と位相差 $\Delta\equiv q_1-q_2$ を用い、陽に 1 自由度のハミルトン系を書く事ができる：

$$\frac{d\Gamma}{dt'}=-2s\sqrt{1+\Gamma}\sin\Delta=-\frac{\partial H}{\partial\Delta},\qquad \frac{d\Delta}{dt'}=2s\frac{\Gamma}{\sqrt{1-\Gamma^2}}\cos\Delta-2b^2\Gamma=\frac{\partial H}{\partial\Gamma},\qquad(4)$$

$$H(\Delta,\Gamma)=-2s\sqrt{1-\Gamma^2}\cos\Delta-b^2\Gamma^2.$$

(4) 式が定義する力学系において $b>1$ の時、原点 $(0,0)$ は双曲型不動点で一様解が不安定であることに対応する。また、位相の和 q_1+q_2 を Δ と Γ から計算でき、位相そのもの q_1,q_2 も知る事ができる。

参考までに a_j 空間での不安定多様体に関して $b^2=2$ の時、$q_1(+\infty)-q_1(-\infty)=q_2(+\infty)-q_2(-\infty)=\pi/2$ なる関係が予言され、実際 (2) 式でもその結果が再現される。もちろん、一般の一様解の振幅 b に関して不安定多様体の配置が計算され、相空間の様子を知ることができる。

参考文献

[WH86] J. A. C.WEIDEMAN and B. M. HERBST, *SIAM. J. NUMER. ANAL.* vol. 23. No. 3. (1986), 485–507.

[GMN99] S. GOTO, Y. MASUTOMI and K. NOZAKI, *Prog. Theor. Phys.* vol. 102, No. 3 (1999), 471–497.

[GN01] S. GOTO and K. NOZAKI, *J. Phys. Soc. Jpn.* vol. 70. (2001), pp49–54.